

§2: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

TÓM TẮT

I - Định nghĩa.

Cho hai véctor $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}, \vec{b}$ được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}; \vec{b})$

II - Biểu thức tọa độ của tích vô hướng.

Cho hai véctor $\vec{a} = (a_1, a_2)$ và $\vec{b} = (b_1, b_2)$.

Ta có:

- ☐ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
- ☐ $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- ☐ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$
- ☐ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \text{ (} \vec{a}, \vec{b} \text{ khác } \vec{0} \text{)}$

➡ Lưu ý: cho 2 điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Độ dài $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

III- Các điểm đặc biệt trong tam giác ABC.

- ☐ Trực tâm H thỏa: $\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$
- ☐ Tâm I của đường tròn ngoại tiếp: $IA = IB = IC$
- ☐ Tọa độ chân đường cao L kẻ từ A: $\begin{cases} \overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BL} = k \overrightarrow{BC} \end{cases}$
- ☐ Tọa độ điểm D là chân đường phân giác trong và điểm E là chân đường phân giác ngoài kẻ từ đỉnh A là: $\overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{EB} = \frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{EC}$
- ☐ Tâm J của đường tròn nội tiếp là giao điểm của ba đường phân giác trong.
 - ♣ Xét $\triangle ABC$: Tìm chân đường phân giác trong của góc A là I ứng với cạnh BC.
 - ♣ Xét $\triangle ABI$: Tâm J là chân đường phân giác trong của góc B ứng với cạnh AI.



Bài tập tự luyện

Bài 1) Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Bài 2) Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A với $BC = 2a$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Bài 3) Cho ΔABC vuông tại A có $AB = a$; $BC = 2a$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Bài 4) Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Tính:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

b) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$.

Bài 5) Xác định hình tính của ΔABC biết:

a) $A(-1;3), B(0;4), C(5;1)$.

b) $A(-2;8), B(-6;1), C(0;4)$.

c) $A(2;-3), B(-1;1), C(6;0)$.

Bài 6) Trong mặt phẳng Oxy, cho 2 điểm $A(-1;2)$, $B(5;4)$. Tìm điểm M thuộc trục Ox sao cho ΔMAB vuông tại M.

Bài 7) Trong mặt phẳng Oxy, cho 2 điểm $A(2;4)$, $B(1;1)$. Tìm điểm C sao cho ΔABC vuông cân tại B.

Bài 8) Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(2;1)$, $B(2;3)$. Tìm tọa độ điểm C thỏa:

a) ΔABC vuông tại C.

b) ΔABC đều.

c) Đối xứng của O qua AB.

Bài 9) Trong mặt phẳng Oxy, cho bốn điểm $A(0;-2)$, $B(5;0)$, $C(3;5)$, $D(-2;3)$.

a) Chứng minh rằng: ABCD là hình vuông.

b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường chéo.

Bài 10) Cho ΔABC có $A(0;-2)$, $B(5;0)$, $C(3;5)$.

a) Định tính của ΔABC .

b) Tính chu vi ΔABC .

c) Tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Bài 11) Cho ΔABC có $A(4;6)$, $B(5;1)$, $C(1;-3)$.

a) Tính chu vi ΔABC .

b) Tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

c) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

Bài 12) Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;3)$, $B(4;2)$.

a) Tìm tọa độ điểm $D \in Ox$ cách đều hai điểm A và B.

b) Tìm tọa độ chân đường phân giác trong của ΔAOB .

Bài 14) Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $C(2;-2)$.

a) Chứng minh rằng: ABC là một tam giác.

b) Tìm tọa độ chân đường cao kẻ từ A của ΔABC .

- c) Tìm tọa độ trực tâm H của ΔABC .
- d) Tìm tọa độ trọng tâm G và tâm O đường tròn ngoại tiếp của ΔABC .

Chứng minh: H, G, O thẳng hàng.

- e) Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp ΔABC .

Bài 15) Cho ΔABC có $A(1; -1)$, $B(5; -3)$, $C(2; 0)$.

- a) Tính chu vi và nhận dạng tam giác ABC.
- b) Tìm tọa độ điểm M biết $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
- c) Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 16) Cho ΔABC có $A(1; 2)$, $B(-2; 6)$, $C(9; 8)$.

- a) Chứng minh: ΔABC vuông tại A.
- b) Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC .
- c) Tìm tọa độ trực tâm H và trọng tâm G của ΔABC .
- d) Tính chu vi, diện tích ΔABC .
- e) Tìm tọa độ điểm M trên Oy để B, M, A thẳng hàng.
- f) Tìm tọa độ điểm N trên Ox để ΔANC cân tại N.
- g) Tìm tọa độ điểm T thỏa $\overrightarrow{TA} + 2\overrightarrow{TB} - 3\overrightarrow{TC} = \vec{0}$
- h) Tìm tọa độ điểm I là chân đường phân giác trong tại đỉnh C của ΔABC .
- i) Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp ΔABC .

Bài 17) Trong mặt phẳng Oxy, cho bốn điểm $A(-2; 1)$, $B(1; -2)$, $C(4; 7)$, $D(6; 1)$.

- a) Chứng minh: A, B, C không thẳng hàng.
- b) Tính chu vi ΔABC .
- c) Tìm tọa độ của tâm và tính độ dài của bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC .
- d) Chứng minh: ABCD là hình thang và tính diện tích của nó.

Bài 18) Tìm hai điểm A, B thỏa:

- a) Đường thẳng d đi qua $M(5; -4)$ và cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho M là trung điểm AB.
- b) Đường thẳng d đi qua $M(-2; -4)$ và cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB vuông cân.
- c) Đường thẳng d đi qua $M\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ và cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích ΔOAB bằng 3.
- d) Đường thẳng d vuông góc với OM với $M(4; -3)$ và cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích ΔOAB bằng 6.